NGHIÊN CỨU CÁC TÍNH CHẤT PHI CỔ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI THÊM HAI VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP LẺ

***Nguyễn Vũ Thụy*[1]**
***Trương Minh Đức*[1]**

TÓM TẮT

Trong bài báo cáo này, chúng tôi khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ. Bằng việc sử dụng điều kiện nén tổng và nén hiệu hai mode, chúng tôi thu được kết quả trạng thái này là một trạng thái có nén tổng nhưng không nén hiệu hai mode. Tiếp theo chúng tôi khảo sát tính chất phản kết chùm hai mode và sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz của trạng thái này. Kết quả cho thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ có tính chất phản kết chùm và có vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Sau đó chúng tôi khảo sát tính đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ. Kết quả cho thấy trạng thái này thỏa mãn cả hai điều kiện đan rối Hillery - Zubairy và Hyunchul Nha - Jeawan Kim.

Từ khóa: *Nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, phản kết chùm, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, điều kiện đan rối Hillery - Zubairy, điều kiện đan rối Hyunchul Nha - Jeawan Kim*

1. Giới thiệu

Khái niệm về các trạng thái phi cổ điển được các nhà khoa học không ngừng nghiên cứu và phát triển, điển hình như các trạng thái nén, trạng thái kết hợp chẵn, lẻ, đây là những trạng thái phi cổ điển. Vào năm 1991, Agarwal và Tara đã đề xuất ý tưởng về trạng thái kết hợp thêm photon [1] và cũng đã chứng minh được đây là một trạng thái phi cổ điển, trạng thái này thể hiện tính nén, tính antibunching (phản kết chùm) và tuân theo thống kê sub-Poisson. Thêm và bớt photon vào một trạng thái vật lý là một phương pháp quan trọng trong việc tạo ra một trạng thái phi cổ điển mới, nghiên cứu tính chất của các trạng thái phi cổ điển này mở ra những ứng dụng mới trong kỹ thuật. Trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ có dạng

$$\left|\psi\right\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}\left(\hat{a}^{\dagger 2} + b\right)\left(\left|\alpha\right\rangle_a \left|\beta\right\rangle_b - \left|\beta\right\rangle_a \left|\alpha\right\rangle_a\right), \quad (1)$$

trong đó $\hat{a}^{\dagger}$ là toán tử sinh đối với mode *a*, $\hat{b}$ là toán tử hủy đối với mode *b*, $N_{\alpha\beta}$ là hệ số chuẩn hóa

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} = \Big\{ & 4 + 5|\alpha|^2 + |\alpha|^4 + 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha^2\beta + \beta^2\alpha\right] + 5|\beta|^2 + |\beta|^4 \\ & - 2\,\mathrm{Re}\left[5\alpha^*\beta + \alpha^{*2}\beta^2 + \beta^2\alpha + \beta^*\alpha^{*2} + 2\right] \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

[1] Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế
Email: tmduc2009@gmail.com

Việc khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ [2] đã được tác giả Nguyễn Thị Hồng Hạnh nghiên cứu. Tuy nhiên, việc nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ vẫn chưa được đề cập đến. Vì vậy, trong bài báo này chúng tôi tiến hành khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ.

2. Tính chất nén của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ

2.1. Nén tổng hai mode

Nén tổng hai mode được Hillery [3] đưa ra vào năm 1989. Một trạng thái được gọi là nén tổng nếu

$$\left\langle \left(\Delta \hat{V}_\varphi\right)^2 \right\rangle < \frac{1}{4}\left\langle \hat{n}_a + \hat{n}_b + 1 \right\rangle, \tag{3}$$

trong đó $\left\langle \left(\Delta \hat{V}_\varphi\right)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2$, $\hat{V}_\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi}\hat{a}\hat{b}\right)$, $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ và $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$.

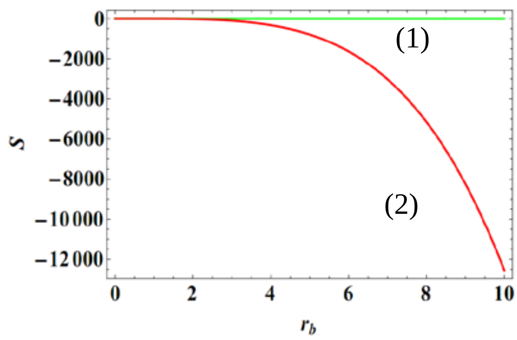
Để thuận tiện cho việc khảo sát ta đặt

$$S = \left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left\langle \hat{n}_a + \hat{n}_b + 1 \right\rangle. \tag{4}$$

Trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, tham số S có dạng

$$\begin{aligned}
S = {}& \frac{1}{4}\left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ 2\Big[|\alpha|^4 + |\beta|^4 + 8\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) + 24\Big]\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\alpha^{*2}\beta^{*2}\right] \\
& + 2\,\mathrm{Re}\Big[e^{2i\varphi}\alpha^{*2}\beta^{*2}\left(\alpha^{*2}\beta^* + |\beta|^2 + \alpha^*\beta^{*2} + |\alpha|^2\right)\Big] + 2\left(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 + 2\right) \\
& |\beta|^2\,\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\beta^*\right] + \left(2|\alpha|^6 + 18|\alpha|^4 + 28|\alpha|^2 + 8\right)|\beta|^2 \\
& + 2\,\mathrm{Re}\Big[\left(2|\alpha|^2 + 4\right)|\beta|^2\alpha^2\beta\Big] + 2\left(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2\right)|\alpha|^2\,\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\alpha^*\right] \\
& + \left(2|\beta|^6 + 18|\beta|^4 + 28|\beta|^2 + 8\right)|\alpha|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big[\left(2|\beta|^2 + 4\right)|\alpha|^2\alpha\beta^2\Big] \\
& - 2\,\mathrm{Re}\Big[e^{2i\varphi}\left(\alpha^{*4}\beta^2 + 8\alpha^{*3}\beta + 12\alpha^{*2}\right)\beta^{*2} + e^{2i\varphi}\left(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + 2\right)\beta^{*2}\alpha \\
& + e^{-2i\varphi}\left(\alpha^{*2}\beta^4 + 8\alpha^*\beta^3 + 12\beta^2\right)\alpha^2 + e^{-2i\varphi}\left(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + 2\right)\beta^*\alpha^2 \\
& + e^{-2i\varphi}\beta^4\alpha^3 + e^{2i\varphi}\alpha^{*4}\beta^{*3} + e^{2i\varphi}\alpha^{*2}\beta^{*3}\alpha + e^{-2i\varphi}\beta^2\beta^*\alpha^3 + 2\alpha^*\beta\beta^{*2}\alpha^2 \\
& + \left(2\alpha^{*3}\beta^3 + 16\alpha^{*2}\beta^2 + 28\alpha^*\beta + 8\right)\beta^*\alpha + \left(2\alpha^*\beta^3 + 4\beta^2\right)\beta^*\alpha^2 \\
& + \left(2\alpha^{*3}\beta + 4\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\alpha\Big]\exp\left[-|\alpha-\beta|^2\right]\Big\} - \frac{1}{4}\left|N_{\alpha\beta}\right|^4 \Big\{2\,\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\alpha^*\beta^*\right] \\
& \times\left(|\alpha|^4 + |\beta|^4 + 6|\alpha|^2 + 6|\beta|^2 + 12\right) + 2\,\mathrm{Re}\Big[e^{-i\varphi}\alpha\beta\Big(\alpha^2\beta + |\alpha|^2 \\
& + |\beta|^2 + \alpha\beta^2\Big)\Big] + 2\left(|\alpha|^2 + 2\right)\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\alpha|\beta|^2\right] + 2\left(|\beta|^2 + 2\right) \\
& \times \mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}|\alpha|^2\beta\right] - 2\,\mathrm{Re}\Big[\left(e^{i\varphi}\alpha^*\beta^* + e^{-i\varphi}\alpha\beta\right)\left(\alpha^{*2}\beta^2 + 6\alpha^*\beta + 6\right) \\
& + e^{-i\varphi}\alpha^2\left(|\beta|^2 + \beta^3\right) + \left(e^{i\varphi}\alpha|\beta|^2 + e^{-i\varphi}|\alpha|^2\beta^*\right)\left(\alpha^*\beta + 2\right) \\
& + e^{i\varphi}\beta^{*2}\left(|\alpha|^2 + \alpha^{*3}\right)\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Dựa vào điều kiện (3), nếu biểu thức (5) nhận giá trị âm thì trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ thể hiện tính nén tổng hai mode. Để khảo sát tính nén tổng, chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$.



Hình 1: *Đồ thị khảo sát nén tổng hai mode của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ (đường (1)) và trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ (đường (2))*

Đồ thị hình 1 khảo sát tính nén tổng hai mode của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ (đường (1)) và trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ (đường (2)) với điều kiện khảo sát là $r_a = r_b$, $\varphi_a = \dfrac{\varphi_b}{2}$, $0 \le r_b \le 5$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$. Kết quả cho thấy cả hai trạng thái đều nén tổng, tuy nhiên trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ có tính nén tổng hai mode yếu hơn.

2.2. Nén hiệu hai mode

Nén hiệu hai mode được Hillery [3] đưa ra vào năm 1989. Một trạng thái được gọi là nén hiệu nếu

$$\left\langle \left(\Delta \hat{W}_\varphi\right)^2 \right\rangle < \frac{1}{4}\left\langle \hat{n}_a - \hat{n}_b \right\rangle, \qquad (6)$$

trong đó $\left\langle \left(\Delta \hat{W}_\varphi\right)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{W}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{W}_\varphi \right\rangle^2$, $\hat{W}_\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}\hat{a}\hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi}\hat{a}^\dagger\hat{b}\right)$, $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ và $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}$.

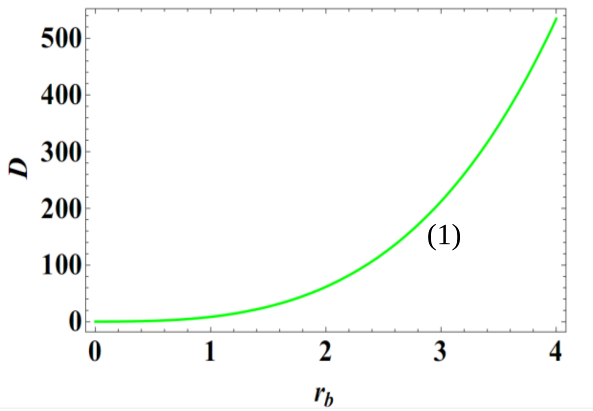
Để thuận tiện cho việc khảo sát ta đặt

$$D = \left\langle \hat{W}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{W}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left\langle \hat{n}_a - \hat{n}_b \right\rangle. \quad (7)$$

Trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, ta có:

$$\begin{aligned}
D = {} & \frac{1}{4}\left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ 2\,\mathrm{Re}\Big[e^{2i\varphi}\left(\alpha^{*2}\alpha^4 + 8\alpha^*\alpha^3 + 12\alpha^2\right)\beta^{*2} \Big] + \Big(2|\alpha|^6 + 18|\alpha|^4 \\
& + 36|\alpha|^2 + 12\Big)|\beta|^2 + \left(2|\alpha|^2 + 2\right)|\beta|^4 + 2\left(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 + 2\right)\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\beta^{*3}\right] \\
& + 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha^2\beta^*\beta^2\right] + 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha^2\alpha^*\beta^2\right] + 2\,\mathrm{Re}\left[\left(2\alpha^{*3}\alpha + 5\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\beta\right] \\
& + 2\,\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\alpha^4\beta^{*2}\beta + e^{2i\varphi}\alpha^2\beta^{*3}\beta\right] + 2\,\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\left(\beta^{*2}\beta^4 + 8\beta^*\beta^3 + 12\beta^2\right)\alpha^{*2}\right] \\
& + \left(2|\beta|^6 + 18|\beta|^4 + 36|\beta|^2 + 12\right)|\alpha|^2 + \left(2|\beta|^2 + 2\right)|\alpha|^4 + 2\left(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2\right) \\
& \times \mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\alpha^{*3}\right] + 2\,\mathrm{Re}\left[\left(2\beta^{*3}\beta + 5\beta^{*2}\right)\alpha^{*2}\alpha\right] + 2\,\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi}\beta^4\alpha^{*2}\alpha + e^{2i\varphi}\beta^2\alpha^{*3}\alpha\right] \\
& - 2\,\mathrm{Re}\Big[e^{2i\varphi}\left(\alpha^{*2}\beta^4 + 8\alpha^*\beta^3 + 12\beta^2\right)\beta^{*2} + e^{-2i\varphi}\left(\alpha^{*4}\beta^2 + 8\alpha^{*3}\beta + 12\alpha^{*2}\right)\alpha^2 \\
& + \left(2\alpha^{*3}\beta^3 + 18\alpha^{*2}\beta^2 + 36\alpha^*\beta + 12\right)\beta^*\alpha + \left(2\alpha^*\beta + 2\right)\beta^{*2}\alpha^2 \\
& + \left(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + 2\right)\left(e^{2i\varphi}\beta^{*3} + e^{-2i\varphi}\alpha^3\right) + \alpha^{*2}\beta^{*2}\alpha + \left(2\alpha^{*3}\beta + 5\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\alpha \\
& + \left(2\alpha^*\beta^3 + 5\beta^2\right)\beta^*\alpha^2 + e^{2i\varphi}\beta^4\beta^{*2}\alpha + \beta^2\beta^*\alpha^2 + e^{-2i\varphi}\alpha^{*4}\beta^*\alpha^2 + e^{-2i\varphi}\alpha^{*2}\beta^*\alpha^3 \\
& + e^{2i\varphi}\beta^2\beta^{*3}\alpha\Big] \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\} - \frac{1}{4}\left|N_{\alpha\beta}\right|^4 \Big\{ 2\left(|\alpha|^4 + 6|\alpha|^2 + 6\right)\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\alpha\beta^*\right] \\
& + 2\left(|\alpha|^2 + 2\right)\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\alpha^*\beta^{*2}\right] + 2|\beta|^2\,\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\alpha^3 + e^{i\varphi}\alpha\beta^*\right] + 2\left(|\beta|^4 + 6|\beta|^2 + 6\right) \\
& \times \mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\alpha^*\beta\right] + 2\left(|\beta|^2 + 2\right)\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\alpha^{*2}\beta^*\right] + 2|\alpha|^2\,\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\beta^3 + e^{i\varphi}\alpha^*\beta\right] \\
& - 2\,\mathrm{Re}\Big[\left(\alpha^{*2}\beta^2 + 6\alpha^*\beta + 6\right)\left(e^{i\varphi}|\beta|^2 + e^{-i\varphi}|\alpha|^2\right) + \Big(e^{i\varphi}\beta^3 + e^{-i\varphi}\alpha^{*3} + e^{i\varphi}|\beta|^2 \\
& + e^{-i\varphi}|\alpha|^2\Big)\beta^*\alpha + \left(\alpha^*\beta + 2\right)\left(e^{i\varphi}\alpha^*\beta^{*2} + e^{-i\varphi}\alpha^2\beta\right)\Big] \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}^2. \quad (8)
\end{aligned}$$

Dựa vào điều kiện (6), nếu biểu thức (8) nhận giá trị âm thì trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ có tính nén hiệu hai mode. Để khảo sát tính nén hiệu, ta đặt $\alpha = r_a \exp\left(i\varphi_a\right)$, $\beta = r_b \exp\left(i\varphi_b\right)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$.



Hình 2: *Đồ thị khảo sát nén hiệu hai mode của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ*

Đồ thị hình 2 khảo sát nén hiệu hai mode của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ với điều kiện khảo sát là $r_a = 2r_b$, $\varphi_a = 2\varphi_b$, $0 \le r_b \le 4$ và $\varphi_b = \pi/2$. Đồ thị cho thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ không có tính nén hiệu hai mode.

3. Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schawarz và tính chất phản kết chùm của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ

3.1. Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

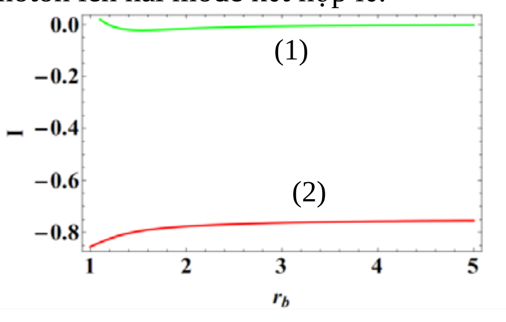
Đối với các trường cổ điển, bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho trường hợp hai mode có dạng

$$I = \frac{\left[\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^{2}\right\rangle\left\langle \hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\right\rangle\right]^{1/2}}{\left|\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\hat{a}\right\rangle\right|} - 1 \ge 0. \quad (9)$$

Đối với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, ta thu được kết quả sau

$$
\begin{aligned}
I = \Big\{ \Big[& |\alpha|^8 + 12|\alpha|^6 + 38|\alpha|^4 + 32|\alpha|^2 + 4 + 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha^{*4}\alpha^2\beta^* + 4\alpha^{*3}\alpha\beta^* + 2\alpha^{*2}\beta^*\right] \\
& + |\alpha|^4|\beta|^2 + |\beta|^8 + 12|\beta|^6 + 38|\beta|^4 + 32|\beta|^2 + 4 + 2\,\mathrm{Re}\left[\beta^{*4}\beta^2\alpha^* + 4\beta^{*3}\beta\alpha^* \right.\\
& \left. + 2\alpha^*\beta^{*2}\right] + |\alpha|^2|\beta|^4 - 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha^{*4}\beta^4 + 12\alpha^{*3}\beta^3 + 38\alpha^{*2}\beta^2 + 32\alpha^*\beta + 4 \right.\\
& \left. + \alpha^{*4}\beta^2\beta^* + 4\alpha^{*3}|\beta|^2 + 2\alpha^{*2}\beta^* + \alpha^{*2}\beta^4\alpha + 4|\alpha|^2\beta^3 + 2\alpha\beta^2 + \alpha^{*2}\beta^2\beta^*\alpha\right] \\
& \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big] \times \Big[\left(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 + 2\right)|\beta|^4 + 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha^2\beta\right]|\beta|^4 + |\beta|^6 \\
& + \left(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2\right)|\alpha|^4 + 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha\beta^2\right]|\alpha|^4 + |\alpha|^6 - 2\,\mathrm{Re}\Big[\Big(\alpha^{*2}\beta^2 \\
& + 4\alpha^*\beta + 2\Big)\alpha^2\beta^{*2} + |\alpha|^4\beta^{*3} + |\beta|^4\alpha^3 + \beta^{*3}\alpha^3\Big] \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
& \times \Big\{\left(|\alpha|^6 + 8|\alpha|^4 + 14|\alpha|^2 + 4\right)|\beta|^2 + |\alpha|^2|\beta|^4 + 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\alpha^{*2}|\alpha|^2 + 2\alpha^{*2}\right)\beta^*|\beta|^2\right] \\
& + \left(|\beta|^6 + 8|\beta|^4 + 14|\beta|^2 + 4\right)|\alpha|^2 + |\alpha|^4|\beta|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\beta^{*2}|\beta|^2 + 2\beta^{*2}\right)\alpha^*|\alpha|^2\right] \\
& - 2\,\mathrm{Re}\Big[\left(\alpha^{*3}\beta^3 + 8\alpha^{*2}\beta^2 + 14\alpha^*\beta + 4\right)\beta^*\alpha + \left(\alpha^{*3}\beta + 2\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\alpha \\
& + \left(\alpha^*\beta^3 + 2\beta^2\right)\beta^*\alpha^2 + \alpha^*\beta\beta^{*2}\alpha^2\Big] \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}^{-1} - 1.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Một trạng thái là phi cổ điển nếu trạng thái đó vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, nghĩa là $I < 0$. Để đơn giản, chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$. Bây giờ, chúng ta sẽ đi khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ.



Hình 3: *Đồ thị khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ (đường (1)) và trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ (đường (2))*

Đồ thị hình 3 khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ (đường (1)) và trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ (đường (2)) với điều kiện khảo sát là $r_a = r_b, 1 \le r_b \le 5, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \pi/2$. Đồ thị cho thấy trong cùng một điều kiện khảo sát thì cả hai trạng thái đều vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, tuy nhiên sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ở trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ là yếu hơn.

3.2. Tính phản kết chùm

Tính phản kết chùm được Ching Tsung Lee [4] đưa ra vào năm 1990.

Điều kiện để tồn tại tính phản kết chùm là

$$R_{ab}(l,p)=\frac{\left\langle \hat{n}_a^{(l+1)}\hat{n}_b^{(p-1)}\right\rangle+\left\langle \hat{n}_a^{(p-1)}\hat{n}_b^{(l+1)}\right\rangle}{\left\langle \hat{n}_a^{(l)}\hat{n}_b^{(p)}\right\rangle+\left\langle \hat{n}_a^{(p)}\hat{n}_b^{(l)}\right\rangle}-1<0, \quad (11)$$

với $l \geq p > 0$, l, p là số nguyên và $\hat{n}_a=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$, $\hat{n}_b=\hat{b}^{\dagger}\hat{b}$. Trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, ta có các kết quả sau

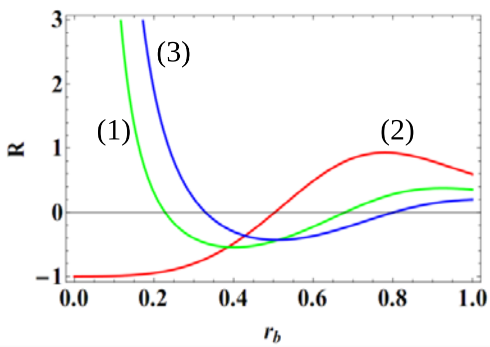
$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{n}_a^{(l+1)}\hat{n}_b^{(p-1)}\right\rangle &= \left|N_{\alpha\beta}\right|^2\Big\{\Big[|\alpha|^{2(l+3)}+4(l+2)|\alpha|^{2(l+2)}+\Big(6(l+1)^2+6(l+1)+2\Big)\\
&\times|\alpha|^{2(l+1)}+4(l+1)^3|\alpha|^{2l}+l^2(l+1)^2|\alpha|^{2(l-1)}\Big]|\beta|^{2(p-1)}\\
&+|\alpha|^{2(l+1)}|\beta|^{2p}+\Big(|\alpha|^{2(l+1)}+2(l+1)|\alpha|^{2l}+l(l+1)|\alpha|^{2(l-1)}\Big)\\
&\times|\beta|^{2(p-1)}\alpha^{*2}\beta^{*}+\Big(|\alpha|^{2(l+1)}+2(l+1)|\alpha|^{2l}+l(l+1)|\alpha|^{2(l-1)}\Big)\\
&\times|\beta|^{2(p-1)}\alpha^{2}\beta+\Big[|\beta|^{2(l+3)}+4(l+2)|\beta|^{2(l+2)}+\Big(6(l+1)^2\\
&+6(l+1)+2\Big)|\beta|^{2(l+1)}+4(l+1)^3|\beta|^{2l}+l^2(l+1)^2|\beta|^{2(l-1)}\Big]\\
&\times|\alpha|^{2(p-1)}+|\beta|^{2(l+1)}|\alpha|^{2p}+\Big(|\beta|^{2(l+1)}+2(l+1)|\beta|^{2l}+l(l+1)\\
&\times|\beta|^{2(l-1)}\Big)|\alpha|^{2(p-1)}\alpha^{*}\beta^{*2}+\Big(|\beta|^{2(l+1)}+2(l+1)|\beta|^{2l}+l(l+1)\\
&\times|\beta|^{2(l-1)}\Big)|\alpha|^{2(p-1)}\alpha\beta^{2}-\Big[\Big(\alpha^{*(l+3)}\beta^{(l+3)}+4(l+2)\alpha^{*(l+2)}\beta^{(l+2)}\\
&+\Big(6(l+1)^2+6(l+1)+2\Big)\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l+1)}+4(l+1)^3\alpha^{*l}\beta^{l}\\
&+l^2(l+1)^2\alpha^{*(l-1)}\beta^{(l-1)}\Big)\beta^{*(p-1)}\alpha^{(p-1)}+\Big(\alpha^{*(l+3)}\beta^{(l+1)}+2(l+1)\alpha^{*(l+2)}\beta^{l}\\
&+l(l+1)\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l-1)}\Big)\beta^{*p}\alpha^{(p-1)}+\Big(\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l+3)}+2(l+1)\alpha^{*l}\beta^{(l+2)}\\
&+l(l+1)\alpha^{*(l-1)}\beta^{(l+1)}\Big)\beta^{*(p-1)}\alpha^{p}+\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l+1)}\beta^{*p}\alpha^{p}+\Big(\alpha^{(l+3)}\beta^{*(l+3)}\\
&+4(l+2)\alpha^{(l+2)}\beta^{*(l+2)}+\Big(6(l+1)^2+6(l+1)+2\Big)\alpha^{(l+1)}\beta^{*(l+1)}\\
&+4(l+1)^3\alpha^{l}\beta^{*l}+l^2(l+1)^2\alpha^{(l-1)}\beta^{*(l-1)}\Big)\alpha^{*(p-1)}\beta^{(p-1)}+\Big(\beta^{*(l+3)}\alpha^{(l+1)}\\
&+2(l+1)\beta^{*(l+2)}\alpha^{l}+l(l+1)\beta^{*(l+1)}\alpha^{(l-1)}\Big)\alpha^{*p}\beta^{(p-1)}+\Big(\beta^{*(l+1)}\alpha^{(l+3)}\\
&+2(l+1)\beta^{*l}\alpha^{(l+2)}+l(l+1)\beta^{*(l-1)}\alpha^{(l+1)}\Big)\alpha^{*(p-1)}\beta^{p}\\
&+\beta^{*(l+1)}\alpha^{(l+1)}\alpha^{*p}\beta^{p}\Big]\times\exp\Big(-|\alpha-\beta|^2\Big)\Big\},
\end{aligned} \quad (12)$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{n}_a^{(p-1)}\hat{n}_b^{(l+1)}\right\rangle &= \left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{\Big[|\alpha|^{2(p+1)} + 4p|\alpha|^{2p} + \left(6(p-1)^2+6(p-1)+2\right)|\alpha|^{2(p-1)} \\
&+4(p-1)^3|\alpha|^{2(p-2)} + (p-1)^2(p-2)^2|\alpha|^{2(p-3)}\Big]|\beta|^{2(l+1)} + |\alpha|^{2(p-1)}|\beta|^{2(l+2)} \\
&+\left(|\alpha|^{2(p-1)} + 2(p-1)|\alpha|^{2(p-2)} + (p-1)(p-2)|\alpha|^{2(p-3)}\right)|\beta|^{2(l+1)}\alpha^{*2}\beta^{*} \\
&+\left(|\alpha|^{2(p-1)} + 2(p-1)|\alpha|^{2(p-2)} + (p-1)(p-2)|\alpha|^{2(p-3)}\right)|\beta|^{2(l+1)}\alpha^{2}\beta \\
&+\Big[|\beta|^{2(p+1)} + 4p|\beta|^{2p} + \left(6(p-1)^2+6(p-1)+2\right)|\beta|^{2(p-1)} + 4(p-1)^3 \\
&\times|\beta|^{2(p-2)} + (p-1)^2(p-2)^2|\beta|^{2(p-3)}\Big]|\alpha|^{2(l+1)} + |\beta|^{2(p-1)}|\alpha|^{2(l+2)} + \Big(|\beta|^{2(p-1)} \\
&+2(p-1)|\beta|^{2(p-2)} + (p-1)(p-2)|\beta|^{2(p-3)}\Big)|\alpha|^{2(l+1)}\alpha^{*}\beta^{*2} + \Big(|\beta|^{2(p-1)} \\
&+2(p-1)|\beta|^{2(p-2)} + (p-1)(p-2)|\beta|^{2(p-3)}\Big)|\alpha|^{2(l+1)}\alpha\beta^{2} - \Big[\Big(\alpha^{*(p+1)}\beta^{(p+1)} \\
&+4p\alpha^{*p}\beta^{p} + \left(6(p-1)^2+6(p-1)+2\right)\alpha^{*(p-1)}\beta^{(p-1)} + 4(p-1)^3 \\
&\times\alpha^{*(p-2)}\beta^{(p-2)} + (p-1)^2(p-2)^2\alpha^{*(p-3)}\beta^{(p-3)}\Big)\beta^{*(l+1)}\alpha^{(l+1)} + \Big(\alpha^{*(p+1)}\beta^{(p-1)} \\
&+2(p-1)\alpha^{*p}\beta^{(p-2)} + (p-1)(p-2)\alpha^{*(p-1)}\beta^{(p-3)}\Big)\beta^{*(l+2)}\alpha^{(l+1)} \\
&+\left(\alpha^{*(p-1)}\beta^{(p+1)} + 2(p-1)\alpha^{*(p-2)}\beta^{p} + (p-1)(p-2)\alpha^{*(p-3)}\beta^{(p-1)}\right)\beta^{*(l+1)} \\
&\times\alpha^{(l+2)} + \alpha^{*(p-1)}\beta^{(p-1)}\beta^{*(l+2)}\alpha^{(l+2)} + \Big(\alpha^{(p+1)}\beta^{*(p+1)} + 4p\alpha^{p}\beta^{*p} + \Big(6(p-1)^2 \\
&+6(p-1)+2\Big)\alpha^{(p-1)}\beta^{*(p-1)} + 4(p-1)^3\alpha^{(p-2)}\beta^{*(p-2)} + (p-1)^2 \\
&\times(p-2)^2\alpha^{(p-3)}\beta^{*(p-3)}\Big)\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l+1)} + \Big(\beta^{*(p+1)}\alpha^{(p-1)} + 2(p-1) \\
&\times\beta^{*p}\alpha^{(p-2)} + (p-1)(p-2)\beta^{*(p-1)}\alpha^{(p-3)}\Big)\alpha^{*(l+2)}\beta^{(l+1)} \\
&+\left(\beta^{*(p-1)}\alpha^{(p+1)} + 2(p-1)\beta^{*(p-2)}\alpha^{p} + (p-1)(p-2)\beta^{*(p-3)}\alpha^{(p-1)}\right) \\
&\times\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l+2)} + \beta^{*(p-1)}\alpha^{(p-1)}\alpha^{*(l+2)}\beta^{(l+2)}\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

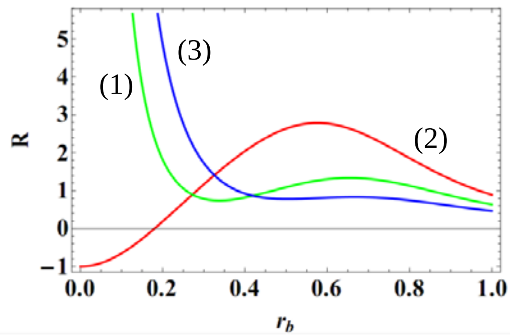
$$\begin{aligned}\left\langle \hat{n}_a^l \hat{n}_b^p \right\rangle &= \left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ \Big[|\alpha|^{2(l+2)} + 4(l+1)|\alpha|^{2(l+1)} + \left(6l^2+6l+2\right)|\alpha|^{2l} + 4l^3|\alpha|^{2(l-1)} + l^2(l-1)^2 \\
&\times |\alpha|^{2(l-2)} \Big] |\beta|^{2p} + |\alpha|^{2l}|\beta|^{2(p+1)} + \left(|\alpha|^{2l} + 2l|\alpha|^{2(l-1)} + l(l-1)|\alpha|^{2(l-2)}\right)|\beta|^{2p}\alpha^{*2}\beta^* \\
&+ \left(|\alpha|^{2l} + 2l|\alpha|^{2(l-1)} + l(l-1)|\alpha|^{2(l-2)}\right)|\beta|^{2p}\alpha^2\beta + \Big[|\beta|^{2(l+2)} + 4(l+1)|\beta|^{2(l+1)} \\
&+ \left(6l^2+6l+2\right)|\beta|^{2l} + 4l^3|\beta|^{2(l-1)} + l^2(l-1)^2|\beta|^{2(l-2)}\Big]|\alpha|^{2p} + |\beta|^{2l}|\alpha|^{2(p+1)} \\
&+ \left(|\beta|^{2l} + 2l|\beta|^{2(l-1)} + l(l-1)|\beta|^{2(l-2)}\right)|\alpha|^{2p}\alpha^*\beta^{*2} + \Big(|\beta|^{2l} + 2l|\beta|^{2(l-1)} + l(l-1) \\
&\times |\beta|^{2(l-2)}\Big)|\alpha|^{2p}\alpha\beta^2 - \Big[\Big(\alpha^{*(l+2)}\beta^{(l+2)} + 4(l+1)\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l+1)} + \left(6l^2+6l+2\right)\alpha^{*l}\beta^l \\
&+ 4l^3\alpha^{*(l-1)}\beta^{(l-1)} + l^2(l-1)^2\alpha^{*(l-2)}\beta^{(l-2)}\Big)\beta^{*p}\alpha^p + \Big(\alpha^{*(l+2)}\beta^l + 2l\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l-1)} \\
&+ l(l-1)\alpha^{*l}\beta^{(l-2)}\Big)\beta^{*(p+1)}\alpha^p + \Big(\alpha^{*l}\beta^{(l+2)} + 2l\alpha^{*(l-1)}\beta^{(l+1)} + l(l-1)\alpha^{*(l-2)}\beta^l\Big) \\
&\times \beta^{*p}\alpha^{(p+1)} + \alpha^{*l}\beta^l\beta^{*(p+1)}\alpha^{(p+1)} + \Big(\alpha^{(l+2)}\beta^{*(l+2)} + 4(l+1)\alpha^{(l+1)}\beta^{*(l+1)} \\
&+ \left(6l^2+6l+2\right)\alpha^l\beta^{*l} + 4l^3\alpha^{(l-1)}\beta^{*(l-1)} + l^2(l-1)^2\alpha^{(l-2)}\beta^{*(l-2)}\Big)\alpha^{*p}\beta^p \\
&+ \Big(\beta^{*(l+2)}\alpha^l + 2l\beta^{*(l+1)}\alpha^{(l-1)} + l(l-1)\beta^{*l}\alpha^{(l-2)}\Big)\alpha^{*(p+1)}\beta^p + \Big(\beta^{*l}\alpha^{(l+2)} + 2l\beta^{*(l-1)} \\
&\times \alpha^{(l+1)} + l(l-1)\beta^{*(l-2)}\alpha^l\Big)\alpha^{*p}\beta^{(p+1)} + \beta^{*l}\alpha^l\alpha^{*(p+1)}\beta^{(p+1)}\Big] \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}, \quad (14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{n}_a^p \hat{n}_b^l \right\rangle &= \left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ \Big[|\alpha|^{2(p+2)} + 4(p+1)|\alpha|^{2(p+1)} + \left(6p^2+6p+2\right)|\alpha|^{2p} + 4p^3|\alpha|^{2(p-1)} \\
&+ p^2(p-1)^2|\alpha|^{2(p-2)}\Big]|\beta|^{2l} + |\alpha|^{2p}|\beta|^{2(l+1)} + \Big(|\alpha|^{2p} + 2p|\alpha|^{2(p-1)} + p(p-1) \\
&\times |\alpha|^{2(p-2)}|\beta|^{2l}\alpha^{*2}\beta^* + \left(|\alpha|^{2p} + 2p|\alpha|^{2(p-1)} + p(p-1)|\alpha|^{2(p-2)}\right)|\beta|^{2l}\alpha^2\beta \\
&+ \Big[|\beta|^{2(p+2)} + 4(p+1)|\beta|^{2(p+1)} + \left(6p^2+6p+2\right)|\beta|^{2p} + 4p^3|\beta|^{2(p-1)} \\
&+ p^2(p-1)^2|\beta|^{2(p-2)}\Big]|\alpha|^{2l} + |\beta|^{2p}|\alpha|^{2(l+1)} + \Big(|\beta|^{2p} + 2p|\beta|^{2(p-1)} \\
&+ p(p-1)|\beta|^{2(p-2)}\Big)|\alpha|^{2l}\alpha^*\beta^{*2} + \left(|\beta|^{2p} + 2p|\beta|^{2(p-1)} + p(p-1)|\beta|^{2(p-2)}\right) \\
&\times |\alpha|^{2l}\alpha\beta^2 - \Big[\Big(\alpha^{*(p+2)}\beta^{(p+2)} + 4(p+1)\alpha^{*(p+1)}\beta^{(p+1)} + \left(6p^2+6p+2\right) \\
&\times \alpha^{*p}\beta^p + 4p^3\alpha^{*(p-1)}\beta^{(p-1)} + p^2(p-1)^2\alpha^{*(p-2)}\beta^{(p-2)}\Big)\beta^{*l}\alpha^l + \Big(\alpha^{*(p+2)}\beta^p \\
&+ 2p\alpha^{*(p+1)}\beta^{(p-1)} + p(p-1)\alpha^{*p}\beta^{(p-2)}\Big)\beta^{*(l+1)}\alpha^l + \Big(\alpha^{*p}\beta^{(p+2)} + 2p\alpha^{*(p-1)} \\
&\times \beta^{(p+1)} + p(p-1)\alpha^{*(p-2)}\beta^p\Big)\beta^{*l}\alpha^{(l+1)} + \alpha^{*p}\beta^p\beta^{*(l+1)}\alpha^{(l+1)} + \Big(\alpha^{(p+2)}\beta^{*(p+2)} \\
&+ 4(p+1)\alpha^{(p+1)}\beta^{*(p+1)} + \left(6p^2+6p+2\right)\alpha^p\beta^{*p} + 4p^3\alpha^{(p-1)}\beta^{*(p-1)} \\
&+ p^2(p-1)^2\alpha^{(p-2)}\beta^{*(p-2)}\Big)\alpha^{*l}\beta^l + \Big(\beta^{*(p+2)}\alpha^p + 2p\beta^{*(p+1)}\alpha^{(p-1)} + p(p-1) \\
&\times \beta^{*p}\alpha^{(p-2)}\Big)\alpha^{*(l+1)}\beta^l + \Big(\beta^{*p}\alpha^{(p+2)} + 2p\beta^{*(p-1)}\alpha^{(p+1)} + p(p-1)\beta^{*(p-2)}\alpha^p\Big) \\
&\times \alpha^{*l}\beta^{(l+1)} + \beta^{*p}\alpha^p\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l+1)}\Big] \times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}. \quad (15)\end{aligned}$$

Để thuận tiện cho việc khảo sát, chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$. Bây giờ chúng ta sẽ khảo sát tính phản kết chùm của trạng thái này. Đồ thị hình 4 khảo sát tính chất phản kết chùm của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ trong trường hợp *l* = *p* và cùng một điều kiện khảo sát là $r_a = r_b^2, 0 \le r_b \le 1, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \frac{\pi}{2}$. Kết quả cho thấy R_{ab} (2,2) < R_{ab} (3,3) < R_{ab} (4,4). Như vậy trong trường hợp *l* = *p*, khi *l*, *p* càng lớn thì trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ thể hiện tính chất phản kết chùm càng yếu.



Hình 4: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của R_{ab} (2,2), R_{ab} (3,3), R_{ab} (4,4) vào biên độ r_b và φ_b, với $r_a = r_b^2, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \frac{\pi}{2}$. Các tham số được chọn theo thứ tự tương ứng với (2), (1) và (3)*



Hình 5: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của R_{ab} (3,2), R_{ab} (4,3), R_{ab} (5,4) vào biên độ r_b và φ_b, với $r_a = r_b^2, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \frac{\pi}{2}$. Các tham số được chọn theo thứ tự tương ứng với (2), (1) và (3)*

Đồ thị hình 5 khảo sát tính chất phản kết chùm của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ trong trường hợp $l \neq p$ với hiệu số *l* – *p* không đổi và trong cùng một điều kiện khảo sát là $r_a = r_b^2, 0 \le r_b \le 1, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \frac{\pi}{2}$. Đồ thị cho thấy rằng khi *l* và *p* càng tăng đồng thời hiệu số *l* – *p* không đổi thì R_{ab} (3,2) < R_{ab} (4,3) < R_{ab} (5,4). Như vậy tính phản kết chùm của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ thể hiện càng yếu khi hiệu số *l* – *p* không đổi và *l*, *p* tăng dần.

4. Tính đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ

4.1. Điều kiện đan rối Hillery – Zubairy

Điều kiện đan rối tổng quát của Hillery - Zubairy [5] cho hệ hai mode được cho bởi bất đẳng thức sau

$$\left|\left\langle \hat{a}^m \left(\hat{b}^\dagger\right)^n \right\rangle\right|^2 > \left\langle \left(\hat{a}^\dagger\right)^m \hat{a}^m \left(\hat{b}^\dagger\right)^n \hat{b}^n \right\rangle. \quad (16)$$

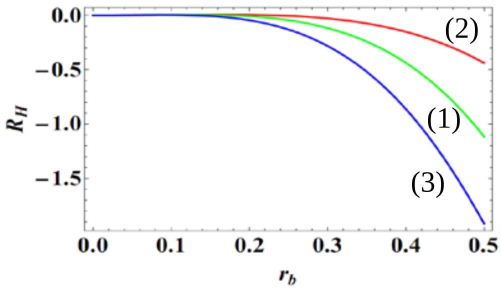
Xét m = n = 2, điều kiện đan rối (16) trở thành

$$R_H = \left\langle \left(\hat{a}^\dagger\right)^m \hat{a}^m \left(\hat{b}^\dagger\right)^n \hat{b}^n \right\rangle - \left|\left\langle \hat{a}^m \left(\hat{b}^\dagger\right)^n \right\rangle\right|^2 < 0. \quad (17)$$

Như vậy một trạng thái là đan rối khi $R_H < 0$, trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, ta có được biểu thức của R_H như sau

$$\begin{aligned}
R_H = {} & |N_{\alpha\beta}|^2 \Big\{ \Big[|\alpha|^8 + 12|\alpha|^6 + 38|\alpha|^4 + 32|\alpha|^2 + 4 \Big] |\beta|^4 + |\alpha|^4 |\beta|^6 + 2\Big(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 \\
& + 2\Big) |\beta|^4 \operatorname{Re}\big[\alpha^{*2}\beta^*\big] + \Big[|\beta|^8 + 12|\beta|^6 + 38|\beta|^4 + 32|\beta|^2 + 4 \Big] |\alpha|^4 + |\beta|^4 |\alpha|^6 \\
& + 2\Big(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2 \Big) |\alpha|^4 \operatorname{Re}\big[\alpha^{*}\beta^{*2}\big] - 2\operatorname{Re}\Big[\Big(\alpha^{*4}\beta^4 + 12\alpha^{*3}\beta^3 + 38\alpha^{*2}\beta^2 \\
& + 32\alpha^*\beta + 4 \Big) \beta^{*2}\alpha^2 + \Big(\alpha^{*4}\beta^2 + 4\alpha^{*3}\beta + 2\alpha^{*2} \Big) \beta^{*3}\alpha^2 + \Big(\alpha^{*2}\beta^4 + 4\alpha^*\beta^3 \\
& + 2\beta^2 \Big) \beta^{*2}\alpha^3 + \alpha^{*2}\beta^2\beta^{*3}\alpha^3 \Big] \times \exp\Big(-|\alpha-\beta|^2 \Big) \Big\} - |N_{\alpha\beta}|^4 \Big\{ \Big(|\alpha|^4 + 8|\alpha|^2 + 12 \Big) \\
& \times \alpha^{*2}\beta^2 + \alpha^{*4}\beta^*\beta^2 + \Big(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 + 2 \Big) \beta^3 + \alpha^{*2}\beta^*\beta^3 + \Big(|\beta|^4 + 8|\beta|^2 + 12 \Big) \\
& \times \alpha^2\beta^{*2} + \beta^{*4}\alpha^*\alpha^2 + \Big(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2 \Big) \alpha^3 + \beta^{*2}\alpha^*\alpha^3 - \Big[\Big(\alpha^{*4}\beta^2 + 8\alpha^{*3}\beta \\
& + 12\alpha^{*2} \Big) \alpha^2 + \alpha^{*4}\beta^*\alpha^2 + \Big(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + 2 \Big) \alpha^3 + \alpha^{*2}\beta^*\alpha^3 + \Big(\beta^{*4}\alpha^2 \\
& + 8\beta^{*3}\alpha + 12\beta^{*2} \Big) \beta^2 + \beta^{*4}\alpha^*\beta^2 + \Big(\alpha^2\beta^{*2} + 4\alpha\beta^* + 2 \Big) \beta^3 + \beta^{*2}\alpha^*\beta^3 \Big] \\
& \times \exp\Big(-|\alpha-\beta|^2 \Big) \Big\} \times \Big\{ \Big(|\alpha|^4 + 8|\alpha|^2 + 12 \Big) \alpha^2\beta^{*2} + \alpha^4\beta^{*2}\beta + \Big(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 \\
& + 2\Big) \beta^{*3} + \alpha^2\beta^{*3}\beta + \Big(|\beta|^4 + 8|\beta|^2 + 12 \Big) \alpha^{*2}\beta^2 + \beta^4\alpha^{*2}\alpha + \Big(|\beta|^4 + 4|\beta|^2 \\
& + 2\Big) \alpha^{*3} + \beta^2\alpha^{*3}\alpha - \Big[\Big(\beta^{*2}\alpha^4 + 8\beta^*\alpha^3 + 12\alpha^2 \Big) \alpha^{*2} + \alpha^4\alpha^{*2}\beta + \Big(\beta^{*2}\alpha^2 \\
& + 4\beta^*\alpha + 2 \Big) \alpha^{*3} + \alpha^2\alpha^{*3}\beta + \Big(\alpha^{*2}\beta^4 + 8\alpha^*\beta^3 + 12\beta^2 \Big) \beta^{*2} + \beta^4\beta^{*2}\alpha \\
& + \Big(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + 2 \Big) \beta^{*3} + \beta^2\beta^{*3}\alpha \Big] \times \exp\Big(-|\alpha-\beta|^2 \Big) \Big\}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Dựa vào điều kiện (17), nếu biểu thức (18) nhận giá trị âm thì trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ bị rối. Để đơn giản, chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$.



Hình 6: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của R_H theo r_b trong các trường hợp $r_a = r_b$ (đường (2)), $r_a = 1.5r_b$ (đường (1)) và $r_a = 2r_b$ (đường (3)).*

Đồ thị hình 6 khảo sát điều kiện đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ theo biên độ r_b với điều kiện $0 \le r_b \le 0.5$, $\varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$ trong các trường hợp $r_a = r_b$ (đường 2)), $r_a = 1.5r_b$ (đường (1)) và $r_a = 2r_b$ (đường (3)). Kết quả cho thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ hoàn toàn bị rối theo điều kiện đan rối Hillery – Zubairy khi ta chọn các điều kiện thích hợp, và khi r_b càng tăng thì R_H càng âm, nghĩa là tính đan rối thể hiện càng mạnh.

4.2. Điều kiện đan rối Hyunchul Nha – Jeawan Kim

Điều kiện đan rối tổng quát của Hyunchul Nha – Jeawan Kim [6] cho hệ hai mode được cho bởi bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} R_N = &\left[1-\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2+\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}-\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^2\right] \\ &\times\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2+\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle-\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^2\right] \\ &-\left(1+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle\right)^2-16\left(\frac{1}{2i}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}\hat{b}-\hat{a}\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right. \\ &\left.+\frac{1}{4i}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right)^2<0. \end{aligned} \tag{19}$$

Trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, ta có các kết quả sau:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\right\rangle &= \left|N_{\alpha\beta}\right|^{2}\Big\{\left(|\alpha|^{4}+8|\alpha|^{2}+12\right)\alpha^{*2}\beta^{2}+\alpha^{*4}\beta^{*}\beta^{2}+\left(|\alpha|^{4}+4|\alpha|^{2}+2\right)\beta^{3}\\
&+\alpha^{*2}\beta^{*}\beta^{3}+\left(|\beta|^{4}+8|\beta|^{2}+12\right)\alpha^{2}\beta^{*2}+\beta^{*4}\alpha^{*}\alpha^{2}+\left(|\beta|^{4}+4|\beta|^{2}+2\right)\alpha^{3}\\
&+\beta^{*2}\alpha^{*}\alpha^{3}-\Big[\left(\alpha^{*4}\beta^{2}+8\alpha^{*3}\beta+12\alpha^{*2}\right)\alpha^{2}+\alpha^{*4}\beta^{*}\alpha^{2}+\big(\alpha^{*2}\beta^{2}+4\alpha^{*}\beta\\
&+2\big)\alpha^{3}+\alpha^{*2}\beta^{*}\alpha^{3}+\left(\beta^{*4}\alpha^{2}+8\beta^{*3}\alpha+12\beta^{*2}\right)\beta^{2}+\beta^{*4}\alpha^{*}\beta^{2}\\
&+\left(\alpha^{2}\beta^{*2}+4\alpha\beta^{*}+2\right)\beta^{3}+\beta^{*2}\alpha^{*}\beta^{3}\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^{2}\right)\Big\},\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}^{2}\hat{b}^{\dagger 2}\right\rangle &= \left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\right\rangle^{*} = \left|N_{\alpha\beta}\right|^{2}\Big\{\left(|\alpha|^{4}+8|\alpha|^{2}+12\right)\alpha^{2}\beta^{*2}+\alpha^{4}\beta^{*2}\beta\\
&+\left(|\alpha|^{4}+4|\alpha|^{2}+2\right)\beta^{*3}+\alpha^{2}\beta^{*3}\beta+\left(|\beta|^{4}+8|\beta|^{2}+12\right)\alpha^{*2}\beta^{2}\\
&+\beta^{4}\alpha^{*2}\alpha+\left(|\beta|^{4}+4|\beta|^{2}+2\right)\alpha^{*3}+\beta^{2}\alpha^{*3}\alpha-\Big[\big(\beta^{*2}\alpha^{4}+8\beta^{*}\alpha^{3}\\
&+12\alpha^{2}\big)\alpha^{*2}+\alpha^{4}\alpha^{*2}\beta+\left(\beta^{*2}\alpha^{2}+4\beta^{*}\alpha+2\right)\alpha^{*3}+\alpha^{2}\alpha^{*3}\beta\\
&+\left(\alpha^{*2}\beta^{4}+8\alpha^{*}\beta^{3}+12\beta^{2}\right)\beta^{*2}+\beta^{4}\beta^{*2}\alpha+\big(\alpha^{*2}\beta^{2}+4\alpha^{*}\beta\\
&+2\big)\beta^{*3}+\beta^{2}\beta^{*3}\alpha\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^{2}\right)\Big\},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle &= \left|N_{\alpha\beta}\right|^{2}\Big\{\left(|\alpha|^{6}+8|\alpha|^{4}+14|\alpha|^{2}+4\right)\left(|\beta|^{2}+1\right)+2\,\mathrm{Re}\Big[\left(\alpha^{*3}\alpha+2\alpha^{*2}\right)\beta^{*}\\
&\times\left(|\beta|^{2}+1\right)\Big]+|\alpha|^{2}\left(|\beta|^{4}+|\beta|^{2}\right)+|\beta|^{2}\left(|\alpha|^{4}+|\alpha|^{2}\right)+\big(|\beta|^{6}+8|\beta|^{4}+14|\beta|^{2}\\
&+4\big)\left(|\alpha|^{2}+1\right)+2\,\mathrm{Re}\Big[\left(\beta^{*3}\beta+2\beta^{*2}\right)\alpha^{*}\left(|\alpha|^{2}+1\right)\Big]-2\,\mathrm{Re}\Big[\big(\alpha^{*3}\beta^{3}\\
&+8\alpha^{*2}\beta^{2}+14\alpha^{*}\beta+4\big)\left(\beta^{*}\alpha+1\right)+\left(\alpha^{*3}\beta+2\alpha^{*2}\right)\beta^{*}\left(\beta^{*}\alpha+1\right)\\
&+\left(\alpha^{*}\beta^{3}+2\beta^{2}\right)\left(\beta^{*}\alpha+1\right)\alpha+\beta^{*}\alpha\left(\alpha^{*2}\beta^{2}+\alpha^{*}\beta\right)\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^{2}\right)\Big\},\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle &= \left|N_{\alpha\beta}\right|^{2}\Big\{\left(|\alpha|^{6}+9|\alpha|^{4}+18|\alpha|^{2}+6\right)|\beta|^{2}+2\,\mathrm{Re}\Big[\left(\alpha^{*3}\alpha+3\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\beta\Big]\\
&+\left(|\alpha|^{2}+1\right)|\beta|^{4}+\left(|\beta|^{6}+9|\beta|^{4}+18|\beta|^{2}+6\right)|\alpha|^{2}+2\,\mathrm{Re}\Big[\big(\beta^{*3}\beta\\
&+3\beta^{*2}\big)\times\alpha^{*2}\alpha\Big]+\left(|\beta|^{2}+1\right)|\alpha|^{4}-2\,\mathrm{Re}\Big[\big(\alpha^{*3}\beta^{3}+9\alpha^{*2}\beta^{2}\\
&+18\alpha^{*}\beta+6\big)\beta^{*}\alpha+\left(\alpha^{*3}\beta+3\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\alpha+\left(\alpha^{*}\beta^{3}+3\beta^{2}\right)\beta^{*}\alpha^{2}\\
&+\left(\alpha^{*}\beta+1\right)\beta^{*2}\alpha^{2}\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^{2}\right)\Big\},\end{aligned} \tag{23}$$

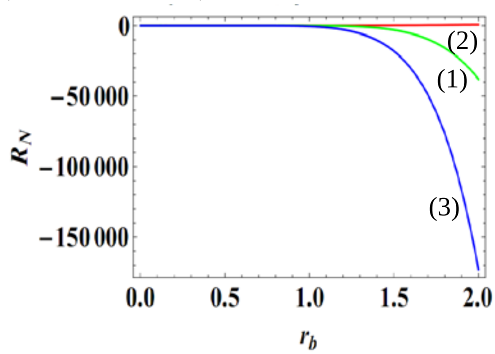
$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle = \left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ & \left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\alpha\beta^* + \left(|\alpha|^2+2\right)\alpha^*\beta^{*2} \\ & +\alpha^3|\beta|^2+\alpha\beta^{*2}\beta+\left(|\beta|^4+6|\beta|^2+6\right)\alpha^*\beta+\left(|\beta|^2+2\right)\alpha^{*2}\beta^* \\ & +\beta^3|\alpha|^2+\alpha\alpha^{*2}\beta-\Big[\left(\alpha^{*2}\beta^3+6\alpha^*\beta^2+6\beta\right)\beta^*+\left(\alpha^{*2}\beta+2\alpha^*\right)\beta^{*2} \\ & +\beta^3\beta^*\alpha+\beta\beta^{*2}\alpha+\left(\beta^{*2}\alpha^3+6\beta^*\alpha^2+6\alpha\right)\alpha^*+\left(\beta^{*2}\alpha+2\beta^*\right)\alpha^{*2} \\ & +\alpha^3\alpha^*\beta+\alpha\alpha^{*2}\beta\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle = \left\langle \hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^* = \left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ & \left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\alpha^*\beta + \left(|\alpha|^2+2\right)\alpha\beta^2 \\ & +\alpha^{*3}|\beta|^2+\alpha^*\beta^2\beta^*+\left(|\beta|^4+6|\beta|^2+6\right)\alpha\beta^*+\left(|\beta|^2+2\right)\alpha^2\beta \\ & +\beta^{*3}|\alpha|^2+\alpha^*\alpha^2\beta^*-\Big[\left(\alpha^2\beta^{*3}+6\alpha\beta^{*2}+6\beta^*\right)\beta+\left(\alpha^2\beta^*+2\alpha\right)\beta^2 \\ & +\beta^{*3}\beta\alpha^*+\beta^*\beta^2\alpha^*+\left(\beta^2\alpha^{*3}+6\beta\alpha^{*2}+6\alpha^*\right)\alpha+\left(\beta^2\alpha^*+2\beta\right)\alpha^2 \\ & +\alpha^{*3}\alpha\beta^*+\alpha^*\alpha^2\beta^*\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\rangle = \left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ & |\alpha|^6+8|\alpha|^4+14|\alpha|^2+4+2\,\mathrm{Re}\left[\left(\alpha^{*3}\alpha+2\alpha^{*2}\right)\beta^*\right]+|\alpha|^2|\beta|^2 \\ & +|\beta|^6+8|\beta|^4+14|\beta|^2+4+2\,\mathrm{Re}\left[\left(\beta^{*3}\beta+2\beta^{*2}\right)\alpha^*\right]+|\alpha|^2|\beta|^2 \\ & -2\,\mathrm{Re}\Big[\alpha^{*3}\beta^3+8\alpha^{*2}\beta^2+14\alpha^*\beta+4+\left(\alpha^{*3}\beta+2\alpha^{*2}\right)\beta^* \\ & +\left(\alpha^*\beta^3+2\beta^2\right)\alpha+|\alpha|^2|\beta|^2\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle = \left|N_{\alpha\beta}\right|^2 \Big\{ & \left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)|\beta|^2+2\,\mathrm{Re}\left[\alpha^{*2}\beta^{*2}\beta\right]+|\beta|^4+\Big(|\beta|^4+4|\beta|^2 \\ & +2\Big)|\alpha|^2+2\,\mathrm{Re}\left[\beta^{*2}\alpha^{*2}\alpha\right]+|\alpha|^4-2\,\mathrm{Re}\Big[\left(\alpha^{*2}\beta^2+4\alpha^*\beta+2\right)\beta^*\alpha \\ & +\alpha^{*2}\beta^{*2}\alpha+\beta^2\beta^*\alpha^2+\beta^{*2}\alpha^2\Big]\times\exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Thay (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26) và (27) vào (19), đồng thời đặt $\alpha = r_a\exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b\exp(i\varphi_b)$ và khảo sát theo biên độ r_b. Đồ thị hình 7 khảo sát điều kiện đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ theo biên độ r_b với điều kiện $0 \le r_b \le 2, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{4}$ trong các trường hợp $r_a = r_b$ (đường màu đỏ), $r_a = 1.5r_b$ (đường màu xanh lá cây) và $r_a = 2r_b$ (đường màu xanh dương). Kết quả cho thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ hoàn toàn bị rối theo điều kiện đan rối Hyunchul Nha - Jeawan Kim khi ta chọn các điều kiện thích hợp, và khi r_b càng tăng thì R_N càng âm, nghĩa là tính đan rối thể hiện càng mạnh.



Hình 7: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của R_N theo biên độ r_b trong các trường hợp $r_a = r_b$ (đường (2)), $r_a = 1.5r_b$ (đường màu (1)) và $r_a = 2r_b$ (đường màu (3)).*

5. Kết luận

Trong bài báo cáo này, chúng tôi đã khảo sát tính chất nén tổng, nén hiệu hai mode, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, tính phản kết chùm, điều kiện đan rối Hillery - Zubairy và điều kiện đan rối Hyunchul Nha – Jeawan Kim của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ. Kết quả cho thấy trạng thái này thể hiện tính chất nén tổng yếu hơn trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ và cũng không nén hiệu hai mode, đồng thời sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cũng yếu hơn trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ. Đối với tính phản kết chùm chúng tôi đã đưa ra tham số tổng quát, tiến hành khảo sát cho các trường hợp $l = p$ và hiệu số $l - p$ không đổi. Kết quả khảo sát cho thấy, trong cả hai trường hợp khi l và p tăng thì tính phản kết chùm của trạng thái này càng yếu đi. Như vậy, trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ là một trạng thái có tính chất phi cổ điển tương đối yếu. Ngoài ra, chúng tôi cũng xét các điều kiện đan rối đối với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, kết quả cho thấy trạng thái này là một trạng thái rối theo cả hai tiêu chuẩn đan rối Hillery - Zubairy và tiêu chuẩn đan rối Hyunchul Nha – Jeawan Kim.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Agarwal. G. S. and Tara. K. (1991), *Physical Review A*, **43**, pp. 492 - 497

2. Nguyễn Thị Hồng Hạnh (2014), "Khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp thêm photon lẻ", Luận văn thạc sĩ, Đại học Sư phạm, Đại học Huế

3. Hillery. M. (1989), *Physical Review A*, **40**, pp. 3147-3155

4. Lee. C. T. (1989), *Physical Review A*, **41**, pp 1569 - 1575

5. Hillery M. and Zubairy M. S. (2006), *Phys. Rev. A*, **74(3)**, 032333

6. Hyunchul Nha and Jeawan Kim (2006), *The American Physical Society*, **74**, 012317

THE NONCLASSICAL PROPERTIES OF THE TWO-PHOTON-ADDED AND ONE-PHOTON-SUBTRACTED TWO-MODE ODD COHERENT STATE

ABSTRACT

The aim of this paper is studying the non-classical properties of the two-photon-added and one-photon-subtracted two-mode odd coherent state. In the two-mode sum squeezing and two-mode difference squeezing conditions, we pointed out that the state is two-mode sum squeezing but not two-mode difference squeezing. The obtained results show that such state is anti-bunching and violation of the Cauchy-Schwarz inequality. We also examined that the two-photon-added and one-photon-subtracted two-mode odd coherent state is completely entangled according to the Hillery – Zubairy and the Hyunchul Nha – Jeawan Kim entanglement criteria.

Keywords: *Two-mode sum squeezing, two-mode difference squeezing, violation of the Cauchy-Schwarz inequality, the Hillery – Zubairy entanglement criteria, Hyunchul Nha – Jeawan Kim entanglement criteria*

(Received: 1/6/2017, Revised: 5/6/2017, Accepted for publication: 12/3/2018)